# ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 519.21

В.В. Булдигін, В.В. Павленков

## ДЕЯКІ АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИСПЕРСІЙНИХ МАТРИЦЬ ПОХИБКИ ОЦІНЮВАННЯ ФІЛЬТРІВ КАЛМАНА–Б'ЮСІ

### Вступ

Фільтрам Калмана–Б'юсі присвячено багато наукової літератури (див., наприклад, [1–4]). Так, у монографії [1] досліджується асимптотична поведінка послідовності дисперсійних матриць похибки оцінювання, де показано, що при достатньо загальних умовах послідовність дисперсійних матриць похибки оцінювання збіжна, а її гранична матриця є єдиним розв'язком у класі додатно визначених симетричних матриць відповідного матричного рівняння. Це рівняння є нелінійним і досить складним для розв'язання.

### Постановка задачі

Метою даної статті є дослідження однієї граничної властивості послідовності дисперсійних матриць похибки оцінювання для деяких типів фільтрів Калмана–Б'юсі, яка може спростити пошук граничної матриці.

### Попередні відомості

Розглянемо систему рекурентних рівнянь

$$X(n+1)=\Phi X(n)+\nu(n+1),$$

$$Y(n+1)=\Theta X(n)+\varepsilon(n+1),\quad n\ge 0,$$

де $X(n)$, $Y(n)$, $n\ge 1$, – випадкові вектори однакової розмірності $l\ge 1$; $\nu(n), \varepsilon(n), n\ge 1$, – незалежні в сукупності центровані гауссові вектори розмірності $l$ з дисперсійними матрицями $D_1=E\nu(n)\nu(n)^T$, $D_2=E\varepsilon(n)\varepsilon(n)^T$, $n\ge 1$; $\Phi$, $\Theta$ – квадратні матриці розміру $l\times l$; тут $A^T$ – матриця, транспонована до матриці $A$. Початкові значення $X(0)$ і $Y(0)$ вважаються гауссовими векторами незалежними з $(\nu(n), \varepsilon(n))$, $n\ge 1$. Зауважимо, що розглядаються і більш загальні схеми (див., наприклад, [1–4]). Під фільтрами Калмана–Б'юсі розуміють рекурентні співвідношення відносно найкращої оцінки мінімуму середньоквадратичного відхилення вектора $X(n+1)$ по спостереженнях $Y(0),\dots,Y(n+1)$.

Позначимо $\Im_n$ σ-алгебру, яка породжується векторами $Y(0),\dots,Y(n+1)$, та нехай $\hat{X}(n+1)$ – найкраща оцінка мінімуму середньоквадратичного відхилення випадкового вектора $X(n+1)$ по спостереженнях $Y(0),\dots,Y(n+1)$. Як відомо (див., зокрема, [2]), $\hat{X}(n+1)=E(X(n+1)|\Im_n)$, $n\ge 0$, де $E(X(n+1)|\Im_n)$ – умовне математичне сподівання вектора $X(n+1)$ відносно σ-алгебри $\Im_n$. Нехай також $B_n=E(X(n)-\hat{X}(n))\times$ $\times(X(n)-\hat{X}(n))^T$, $n\ge 1$, – дисперсійна матриця похибки оцінювання. Покладемо $\hat{X}(0)=X(0)$, $B_0=EX(0)X(0)^T$.

Мають місце такі рекурентні співвідношення:

$$\hat{X}(n+1)=[\Phi-\Phi B_n\Theta^T(\Theta B_n\Theta^T+D_2)^+\Theta]\hat{X}(n)+$$
$$+\Phi B_n\Theta^T(\Theta B_n\Theta^T+D_2)^+Y(n+1), \tag{1}$$

$$B_{n+1}=$$
$$=\Phi B_n\Phi^T-\Phi B_n\Theta^T(\Theta B_n\Theta^T+D_2)^+\Theta B_n\Phi^T+D_1,$$
$$n\ge 0. \tag{2}$$

Тут $A^+$ – матриця, псевдообернена до матриці $A$. Саме співвідношення (1) і (2) називають фільтром Калмана–Б'юсі. Доведення цих співвідношень наведено, зокрема, в [1, 2].

У праці [1] показано, що при достатньо загальних умовах на матриці $\Phi$, $\Theta$, $D_1$ і $D_2$ послідовність $B_n, n\ge 0$, яка визначається рекурентним співвідношенням (2), буде збіжною, а гранична матриця $B$ задовольнятиме рівняння

$$B=\Phi B\Phi^T-\Phi B\Theta^T(\Theta B\Theta^T+D_2)^{-1}\Theta B\Phi^T+D_1.$$

Зауважимо, що рівняння для знаходження граничної матриці є нелінійним і складним для розв'язання навіть у випадку, коли $\Phi=\varphi I$ і $\Theta=\theta I$. Тут $I$ – одинична матриця, а $\varphi$ і $\theta$ – задані дійсні числа, які не дорівнюють нулю.

Основною задачею статті є встановлення нової асимптотичної властивості послідовності $B_n$, $n\ge 0$, у випадку, коли матриці $\Phi=\varphi I$,

$\Theta = \theta I$, $D_1$ і $D_2$ є невиродженими, а власні числа матриці $D_2^{-1}D_1$ різні. Ця властивість може дати додаткову інформацію про граничну матрицю і спростити її знаходження.

**Основні результати**

Розглянемо теорему, в якій встановлюється асимптотична поведінка послідовності $B_n, n \geq 0$, у випадку, коли $\Phi = \varphi I$ і $\Theta = \theta I$. Тут, як і раніше, $I$ — одинична матриця, $\varphi$ і $\theta$ — задані дійсні числа, які не дорівнюють нулю.

**Теорема.** Нехай $\Phi = \varphi I$, $\Theta = \theta I$, $U_n = B_n - D_1$, $n \geq 0$, і матриці $D_1, D_2$ невироджені. Якщо матриця $D_2^{-1}D_1$ має різні власні числа, то матимемо

$$\lim_{n\to\infty} U_n (t_{l+11} \ \cdots \ t_{2l1})^T = (t_{11} \ \cdots \ t_{l1})^T, \qquad (3)$$

де $(t_{11} \ \cdots \ t_{2l1})^T$ — будь-який власний вектор матриці

$$P = \begin{pmatrix} \varphi^2 I & \varphi^2 D_1 \\ \theta^2 D_2^{-1} & \theta^2 D_2^{-1} D_1 + I \end{pmatrix},$$

що відповідає максимальному за модулем її власному числу.

Зауважимо, що умови теореми задовольняють умови теореми 14.3 з [1]. Тому послідовність $B_n, n \geq 0$, збігається до граничної матриці $B$. Звідси та з теореми випливає такий наслідок.

***Наслідок.*** Нехай виконуються умови теореми. Тоді

$$(B - D_1)(t_{l+11} \ \cdots \ t_{2l1})^T = (t_{11} \ \cdots \ t_{l1})^T.$$

Це співвідношення дає можливість отримати додаткові рівняння відносно коефіцієнтів невідомої матриці $B$.

Наступний приклад показує можливе застосування теореми для знаходження граничної матриці при $l > 1$.

***Приклад.*** Розглянемо при $l = 2$ систему рекурентних рівнянь

$$X(n+1) = X(n) + v(n+1),$$

$$Y(n+1) = \frac{1}{\sqrt{6}} X(n) + \varepsilon(n+1), \quad n \geq 0,$$

і нехай

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}, \ D_2 = I.$$

Знайдемо граничну матрицю послідовності дисперсійних матриць похибки оцінювання фільтрів Калмана–Б'юсі для такої системи. Зауважимо, що виконуються умови теореми 14.3 з [1], а отже, існує границя $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Гранична матриця $B$ є симетричною, тому будемо шукати її у вигляді

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix},$$

де $\alpha$, $\beta$ і $\gamma$ — деякі дійсні числа. Для знаходження чисел $\alpha$, $\beta$ і $\gamma$ скористаємося наслідком з теореми. Власні числа матриці $D_2^{-1}D_1$ дорівнюють 8 і 3, і оскільки вони різні, виконуються умови наслідка. З нього випливає, що

$$\begin{pmatrix} \alpha - \frac{11}{2} & \gamma - \frac{5}{2} \\ \gamma - \frac{5}{2} & \beta - \frac{11}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Для знаходження чисел $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ складемо матрицю $P$, яка визначена у формулюванні теореми:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{23}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{23}{12} \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці $P$ становлять 3, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. Максимальне за модулем власне число матриці $P$ дорівнює $3$. Йому відповідає власний вектор $(4 \ \ 4 \ \ 1 \ \ 1)^T$. Отже, $t_1 = 4$, $t_2 = 4$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$. Тому із співвідношення (5) отримуємо

$$\begin{cases} \alpha = \beta, \\ \alpha + \gamma = 12. \end{cases}$$

Отже, маємо

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 12-\alpha \\ 12-\alpha & \alpha \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

З теореми 14.3 [1] випливає, що матриця $B$ є єдиним додатно визначеним симетричним розв'язком рівняння

$$B = \Phi B \Phi^T - \Phi B \Theta^T (\Theta B \Theta^T + D_2)^{-1} \Theta B \Phi^T + D_1,$$

де $\Phi = I$; $\Theta = \frac{1}{\sqrt{6}} I$. Після перетворень з цього рівняння отримуємо

$$B^2 - D_1 B - 6 D_1 = 0.$$

За теоремою Філліпса [5] кожний розв'язок такого квадратного матричного рівняння є коренем рівняння $g(B) = 0$, де

$$g(\lambda) = | I\lambda^2 - D_1\lambda - 6D_1 |.$$

Після підстановки заданої матриці $D_1$ маємо

$$g(\lambda) = \left(\lambda^2 - \frac{11}{2}\lambda - 33\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\lambda + 15\right)^2.$$

Оскільки $g(B) = 0$, то многочлен $g$ є анулюючим многочленом для матриці $B$ (див. [5]) і в множині його коренів містяться всі власні числа матриці $B$. Коренями многочлена $g$ є:

$$\lambda_1 = 12, \ \lambda_2 = 6, \ \lambda_3 = -3, \ \lambda_4 = -4.$$

Оскільки матриця $B$ додатно визначена, то всі її власні числа додатні. Зауважимо, що $\lambda_3 < 0$ і $\lambda_4 < 0$. Отже, можливі такі три варіанти для множини власних чисел матриці $B$: $\{12, 12\}$, $\{6, 6\}$, $\{12, 6\}$. Як відомо [5], слід матриці дорівнює сумі її власних чисел. Зауважимо, що $\mathrm{tr}\, A = 2\alpha$, а для власних чисел матриці $B$ є лише три перераховані вище варіанти. Тому можливі тільки такі три варіанти для числа $\alpha$:

$$\alpha_1 = 6, \ \alpha_2 = 12, \ \alpha_3 = 9.$$

Матриці, які утворюються при підстановці в (6) чисел $\alpha_1$ і $\alpha_2$ замість $\alpha$, не задовольняють рівняння для знаходження граничної матриці, а тому не можуть бути граничними матрицями послідовності дисперсійних матриць похибки оцінювання. Отже, $\alpha = 9$ і $B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

## Доведення основних результатів

При доведенні теореми буде використовуватися таке твердження.

**Лема.** Нехай $X_n$, $n \ge 0$, і $A_{jk}$, $j, k = 1, 2$, – квадратні матриці розміру $l \times l$ з дійсними елементами. Якщо

$$X_{n+1}(A_{21} X_n + A_{22}) = A_{11} X_n + A_{12}, \ n \ge 0,$$

то

$$X_n(A_{21}^{(n)} X_0 + A_{22}^{(n)}) = A_{11}^{(n)} X_0 + A_{12}^{(n)}, \ n \ge 1,$$

де матриці $A_{jk}^{(n)}$, $n \ge 1$, $j, k = 1, 2$, розміру $l \times l$ визначаються як

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{(n)} & A_{12}^{(n)} \\ A_{21}^{(n)} & A_{22}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^n, \ n \ge 1.$$

Доведення леми проводиться методом математичної індукції.

*Доведення теореми.* Для фіксованого $n \ge 0$ матриця $\theta^2 B_n + D_2$ додатно визначена, тому невироджена і існує обернена до неї матриця. Таким чином, при $\Phi = \varphi I$, $\Theta = \theta I$ співвідношення (2) має вигляд

$$B_{n+1} = \varphi^2 B_n - \theta^2 \varphi^2 B_n (\theta^2 B_n + D_2)^{-1} B_n + D_1, \ n \ge 0.$$

Після перетворень це співвідношення набуває вигляду

$$B_{n+1} = \varphi^2 B_n (\theta^2 D_2^{-1} B_n + I)^{-1} + D_1, \ n \ge 0.$$

Оскільки $B_n = U_n + D_1$, $n \ge 0$, то

$$U_{n+1} = (\varphi^2 U_n + \varphi^2 D_1)(\theta^2 D_2^{-1} U_n + \theta^2 D_2^{-1} D_1 + I)^{-1},$$
$$n \ge 0,$$

а тому

$$U_{n+1}(\theta^2 D_2^{-1} U_n + \theta^2 D_2^{-1} D_1 + I) = \varphi^2 U_n + \varphi^2 D_1,$$
$$n \ge 0. \qquad (7)$$

Тоді з (7) і леми випливає, що

$$U_n(P_{21}^{(n)} U_0 + P_{22}^{(n)}) = P_{11}^{(n)} U_0 + P_{12}^{(n)}, \ n \ge 1, \qquad (8)$$

де матриці $P_{11}^{(n)}$, $P_{12}^{(n)}$, $P_{21}^{(n)}$, $P_{22}^{(n)}$ розміру $l \times l$ визначаються у вигляді

$$\begin{pmatrix} P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} \\ P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} \end{pmatrix} = P^n, \ n \ge 1;$$

$$P = \begin{pmatrix} \varphi^2 I & \varphi^2 D_1 \\ \theta^2 D_2^{-1} & \theta^2 D_2^{-1} D_1 + I \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що власні числа матриці $P$ дійсні та різні. Для цього складемо характеристичне рівняння для матриці $P$:

$$|P - \lambda I| = \begin{vmatrix} (\varphi^2 - \lambda) I & \varphi^2 D_1 \\ \theta^2 D_2^{-1} & \theta^2 D_2^{-1} D_1 + (1-\lambda) I \end{vmatrix} = 0.$$

Для обчислення визначника блочної матриці використаємо формулу Шура [5]

$$|P - \lambda I| = |(\varphi^2 - \lambda)\theta^2 D_2^{-1} D_1 +$$
$$+ (\varphi^2 - \lambda)(1-\lambda) I - \varphi^2 \theta^2 D_2^{-1} D_1| =$$
$$= |\lambda^2 I - \lambda((\varphi^2 + 1) I + \theta^2 D_2^{-1} D_1) + \varphi^2 I| = 0.$$

При $\lambda = 0$ отримуємо $|P| = \varphi^2 \ne 0$, а тому серед власних чисел матриці $P$ немає нульових. Матриця $D_2^{-1} D_1$ додатно визначена, тому в неї всі власні числа дійсні. За умовою теореми вони різні. Тоді (див. [5]) справедливе співвідношення $\theta^2 D_2^{-1} D_1 = U \Lambda U^{-1}$, де $\Lambda$ – діагональна матриця, на головній діагоналі якої стоять власні числа матриці $\theta^2 D_2^{-1} D_1$, а $U$ – деяка невироджена матриця. Отже, маємо

$$(\varphi^2 + 1) I + \theta^2 D_2^{-1} D_1 = U \tilde{\Lambda} U^{-1},$$

де $\tilde{\Lambda} = \Lambda + (\varphi^2 + 1) I$. Нехай $\mu_k$, $k = 1, \dots, l$, – власні числа матриці $\theta^2 D_2^{-1} D_1$. Тоді отримаємо

$$|P - \lambda I| = |U \lambda^2 U^{-1} - U \lambda \tilde{\Lambda} U^{-1} + U \varphi^2 U^{-1}| =$$
$$= |\lambda^2 I - \lambda \tilde{\Lambda} + \varphi^2 I| =$$
$$= \prod_{k=1}^{l} (\lambda^2 - \lambda(\mu_k + (\varphi^2 + 1)) + \varphi^2) = 0.$$

Отже, власні числа матриці $P$ знаходяться як розв'язки $l$ квадратних рівнянь

$$\lambda^2 - \lambda(\mu_k + (\varphi^2 + 1)) + \varphi^2 = 0, \ k = 1, \dots, l,$$

з додатними дискримінантами $(\mu_k + \varphi^2 - 1)^2 + 4\mu_k$. Таким чином, всі власні числа матриці $P$ дійсні і різні.

Тоді матрицю $P$ можна записати у вигляді (див. [5])

$$P = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{2l} \end{pmatrix} T^{-1},$$

де $\lambda_j$, $j = 1, \dots, 2l$, – власні числа матриці $P$, а $j$-й стовпчик матриці $T$ – це власний вектор матриці $P$, що відповідає власному числу $\lambda_j$. Тут $\lambda_1$ – максимальне за модулем власне число матриці $P$. Тому отримуємо

$$\frac{P^n}{\lambda_1^n} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\lambda_{2l}}{\lambda_1}\right)^n \end{pmatrix} T^{-1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P^n}{\lambda_1^n} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (9)$$

Нехай

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1\,2l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{2l\,1} & \cdots & t_{2l\,2l} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,2l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2l\,1} & \cdots & a_{2l\,2l} \end{pmatrix}.$$

Тоді з (9) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P^n}{\lambda_1^n} = (t_{11} \ \cdots \ t_{2l\,1})^T (a_{11} \ \cdots \ a_{1\,2l}). \quad (10)$$

З (8) маємо

$$U_n \left( \frac{P_{21}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{22}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) = \frac{P_{11}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{12}^{(n)}}{\lambda_1^n}, \ n \ge 1. \quad (11)$$

З (10) отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{P_{21}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{22}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{l+1\,1} \\ \vdots \\ t_{2l\,1} \end{pmatrix} [(a_{11} \ \cdots \ a_{1\,l})U_0 + (a_{1\,l+1} \ \cdots \ a_{1\,2l})], \quad (12)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{P_{11}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{12}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{1\,1} \\ \vdots \\ t_{l\,1} \end{pmatrix} [(a_{11} \ \cdots \ a_{1\,l})U_0 + (a_{1\,l+1} \ \cdots \ a_{1\,2l})]. \quad (13)$$

Позначимо

$(a_{11} \ \cdots \ a_{1\,l})U_0 + (a_{1\,l+1} \ \cdots \ a_{1\,2l}) = \mathbf{c}^T.$

Розглянемо спочатку випадок, коли $\mathbf{c} \neq 0$. Співвідношення (12) і (13) означають, що для довільного $\mathbf{x} \in R^l$

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{P_{21}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{22}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} t_{l+1\,1} \\ \vdots \\ t_{2l\,1} \end{pmatrix} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle, \quad (14)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{P_{11}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{12}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} t_{1\,1} \\ \vdots \\ t_{l\,1} \end{pmatrix} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle. \quad (15)$$

Зауважимо, що умови теореми задовольняють умови теореми 14.3 [1], з якої випливає, що послідовність $U_n$, $n \geq 0$, є збіжною, а тому обмеженою за нормою. Отже, існує число $M$, таке, що $\|U_n\| \leq M$, $n \geq 0$. З рівності (14) маємо, що для довільного $\mathbf{x} \in R^l$

$$\left\| U_n \left( \frac{P_{21}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{22}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) \mathbf{x} - U_n \begin{pmatrix} t_{l+1\,1} \\ \vdots \\ t_{2l\,1} \end{pmatrix} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \right\| =$$

$$= \left\| U_n \left( \left( \frac{P_{21}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{22}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) \mathbf{x} - \begin{pmatrix} t_{l+1\,1} \\ \vdots \\ t_{2l\,1} \end{pmatrix} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \right) \right\| \leq$$

$$\leq \|U_n\| \left\| \left( \frac{P_{21}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{22}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) \mathbf{x} - \begin{pmatrix} t_{l+1\,1} \\ \vdots \\ t_{2l\,1} \end{pmatrix} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \right\| \leq$$

$$\leq M \left\| \left( \frac{P_{21}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{22}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) \mathbf{x} - \begin{pmatrix} t_{l+1\,1} \\ \vdots \\ t_{2l\,1} \end{pmatrix} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Тому для довільного $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^l$ матимемо

$$\lim_{n\to\infty} U_n \left( \frac{P_{21}^{(n)}}{\lambda_1^n} U_0 + \frac{P_{22}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) \mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} U_n \begin{pmatrix} t_{l+1\,1} \\ \vdots \\ t_{2l\,1} \end{pmatrix} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle. \quad (16)$$

Із співвідношень (11), (15) і (16) отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} U_n (t_{l+1\ 1} \ \cdots \ t_{2l\ 1})^T \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = (t_{11} \ \cdots \ t_{l\,1})^T \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle.$$

Виберемо вектор $\mathbf{x}$ таким, щоб $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$. Це завжди можна зробити, оскільки $\mathbf{c} \neq 0$. Отримаємо твердження (3).

Нехай тепер $\mathbf{c} = 0$. Покажемо, що тоді $(a_{11} \ \cdots \ a_{1\,l})^T \neq 0$. Дійсно, якщо $(a_{11} \ \cdots \ a_{1\,l})^T = 0$, то $(a_{1\,l+1} \ \cdots \ a_{1\,2l})^T = 0$, оскільки $\mathbf{c} = 0$. Але такого не може бути, оскільки матриця $T^{-1}$ є невиродженою і не може мати нульових рядків. Отже, матимемо $(a_{11} \ \cdots \ a_{1\,l})^T \neq 0$. Зауважимо, що в умовах теореми гранична матриця $U = \lim_{n\to\infty} U_n$ не залежить від $U_0$ (див. теорему 14.3 [1]). Тому розглянемо замість початкової матриці $U_0$ нову матрицю $\tilde{U}_0 = U_0 + I$ та відповідну їй послідовність $\tilde{U}_n$, $n \geq 0$. Оскільки гранична матриця $U = \lim_{n\to\infty} U_n$ не залежить від $U_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{U}_n. \quad (17)$$

Зауважимо, що матриця $P$ не залежить від $U_0$, а тому для послідовності $\tilde{U}_n$, $n \geq 0$, виконується аналогічне формулі (11) рекурентне співвідношення

$$\tilde{U}_n \left( \frac{P_{21}^{(n)}}{\lambda_1^n} \tilde{U}_0 + \frac{P_{22}^{(n)}}{\lambda_1^n} \right) = \frac{P_{11}^{(n)}}{\lambda_1^n} \tilde{U}_0 + \frac{P_{12}^{(n)}}{\lambda_1^n}, \ n \geq 1.$$

Новій матриці $\tilde{U}_0$ відповідає вектор

$$\mathbf{c}_1^T = (a_{11} \quad \cdots \quad a_{1\,l})\tilde{U}_0 + (a_{1\,l+1} \quad \cdots \quad a_{1\,2l}) =$$

$$= (a_{11} \quad \cdots \quad a_{1\,l}) + \mathbf{c}^T = (a_{11} \quad \cdots \quad a_{1\,l}) \neq 0.$$

Оскільки $\mathbf{c}_1 \neq 0$, то можна використати попередні міркування, як у випадку $\mathbf{c} \neq 0$, звідки матимемо

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{U}_n (t_{l+1\;1} \quad \cdots \quad t_{2l\;1})^T = (t_{11} \quad \cdots \quad t_{l\,1})^T. \quad (18)$$

З (17) і (18) випливає співвідношення (3). Теорему доведено.

**Висновки**

Послідовність дисперсійних матриць похибки оцінювання, яка визначена співвідношенням (2), задовольняє співвідношення (3) у випадку, коли кожна з матриць Φ і Θ є діагональними матрицями з однаковими елементами на головній діагоналі та при додаткових умовах на матрицях $D_1$ і $D_2$. Ця властивість спрощує знаходження граничної матриці в даному випадку.

У подальших дослідженнях планується розглянути асимптотичні властивості дисперсійної матриці похибки оцінювання для більш загальних фільтрів Калмана–Б'юсі.

В.В. Булдыгин, В.В. Павленков

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСИОННЫХ МАТРИЦ ОШИБКИ ОЦЕНИВАНИЯ ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА–БЬЮСИ

Рассмотрены предельные свойства некоторых фильтров Калмана–Бьюси. Исследуются условия сходимости последовательности дисперсионных матриц ошибки оценивания и свойства предельной матрицы.

V.V. Buldygin, V.V. Pavlenkov

SOME ASYMPTOTIC PROPERTIES OF DISPERSION MATRICES OF THE ESTIMATION ERROR FOR KALMAN-BJUSY FILTERS

This paper deals with asymptotic properties of some Kalman-Bjusy filters. We also consider the conditions of convergence of dispersion matrices sequence of the estimation error and the properties of the limit matrix.

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
2. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 548 с.
3. *Балакришнан А.В.* Теория фильтрации Калмана / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 168 с.
4. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / Пер. с англ.– М.: Наука, 1977. – 224 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
21 грудня 2007 року